ΜΕΘΟΔΟΣ GAUSS-SEIDEL και JACOBI

ΘΕΩΡΟΥΜΕ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

$$\begin{bmatrix} 10 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 11 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 10 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 25 \\ -11 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Να γίνουν τρεις επαναλήψεις με $x^{(0)} = \bar{0}$ των μεθόδων Jacobi και Gauss-seidel για την προσέγγιση της λύσης του γραμμικού συστήματος

ΛΥΣΗ

Jacobi

$$x_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \cdot \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \cdot x_j^{(m)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(m)} \right], \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

• $i = 1$

$$x_1^{(m+1)} = \frac{1}{a_{11}} \cdot \left[b_1 - \cancel{\sum_{j=1}^{0} a_{1j} x_j^{(m)}} - \sum_{j=2}^{4} a_{1j} x_i^{(m)} \right] =$$

$$= \frac{1}{10} \left[6 - \left(a_{12} x_2^{(m)} + a_{13} x_3^{(m)} + a_{14} x_4^{(m)} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{10} \left[6 + x_2^{(m)} - 2 x_3^{(m)} \right]$$

• $i = 2$

$$x_2^{(m+1)} = \frac{1}{a_{22}} \left[b_2 - \sum_{j=1}^{1} a_{2j} x_j^{(m)} - \sum_{j=3}^{4} a_{2j} x_j^{(m)} \right] =$$

$$= \frac{1}{11} \left[25 - (a_{21} \cdot x_1^{(m)}) - (a_{23} x_3^{(m)} + a_{24} x_4^{(m)} \right] =$$

$$= \frac{1}{11} \left[25 + x_1^{(m)} + x_3^{(m)} + 3 x_4^{(m)} \right]$$

• $i = 3$

$$x_3^{(m+1)} = \frac{1}{10} \left[-11 - 2 x_1^{(m)} + x_2^{(m)} + x_4^{(m)} \right]$$

• $i=4$

$$x_4^{(m+1)} = \frac{1}{8}\cdot\left[15 - 3x_2^{(m)} + x_3^{(m)}\right]$$

Δεδομένου $x^{(0)} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

Έχουμε, $x^{(1)} = \begin{pmatrix}6/10\\25/11\\-11/10\\15/8\end{pmatrix}$, $x^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10}\left(6+\frac{25}{11}+2\frac{11}{10}\right) \\ \frac{1}{11}\left(25+\frac{6}{10}-\frac{11}{10}-3\frac{15}{8}\right) \\ \frac{1}{10}\left(-11-2\frac{6}{10}+\frac{25}{11}+\frac{15}{8}\right) \\ \frac{1}{8}\left(15-3\frac{25}{11}+\left(-\frac{11}{10}\right)\right)\end{pmatrix}$

$x^{(3)} = \begin{pmatrix}\text{κλπ}\\ \vdots \\ \vdots\end{pmatrix}$ και $x^{(4)} = \begin{pmatrix}\text{κλπ}\\ \vdots \\ \vdots\end{pmatrix}$

Με όμοιο τρόπο αντικατάστασης βρίσκουμε τα $x^{(3)}$ και $x^{(4)}$ [ΣΥΓΛΙΝΕΙ ΠΙΟ ΑΡΓΑ ΑΠΟ ΤΗ GAUSS-SEIDEL]

Με Gauss-Seidel

$$x^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^{4} a_{ij}x_j^{(m)}\right)$$

Έχουμε:

• $x_1^{(m+1)} = \frac{1}{10}\left(6 + x_2^{(m)} - 2x_3^{(m)}\right)$

• $x_2^{(m+1)} = \frac{1}{11}\left(25 + x_1^{(m+1)} + x_3^{(m)} - 3x_4^{(m)}\right)$

• $x_3^{(m+1)} = \frac{1}{10}\left(-11 - 2x_1^{(m+1)} + x_2^{(m+1)} + x_4^{(m)}\right)$

• $x_4^{(m+1)} = \frac{1}{8}\left(15 - 3x_2^{(m+1)} + x_3^{(m+1)}\right)$

(διότι στη Gauss $\|x^{(4)}-x\|_\infty$ είναι μικρότερη από την $\|x^{(4)}-x\|_\infty$ στην Jacobi)

Δεδομένου $x^{(0)} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ βρίσκουμε όμοια με πριν τα $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}$ [ΣΥΓΛΙΝΕΙ ΤΑΧΥΤΕΡΑ]